2 **cognome e nome**: ....

Appello di Fisica Matematica - seconda parte - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 3 settembre 2012

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui sono svolti gli esercizi relativi a 2 e 3, anch'esso con cognome e nome e con i numeri 2 e 3 messi bene in evidenza.

1• Data una Lagrangiana meccanica $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$, sia $q^* = 0$ un punto d'equilibrio stabile: $\nabla U(0) = 0, \quad \nabla^2 U(0)\ :\ \ def.\ pos.$ Scrivere la teoria delle piccole oscillazioni attorno a tale punto. Dedurre l'equazione le cui soluzioni sono le pulsazioni ω di piccola oscillazione attorno a $q^* = 0$.

2• Nel piano verticale OXY, y verticale ascendente, $\underline{g} = -g\,\hat{y}$, $g > 0$, del sistema $OXYZ$, un disco omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse X. Sull'asse X è inoltre vincolata senza attrito una particella P di massa m e tra P e il baricentro G del disco è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Il sistema $OXYZ$ ruota uniformemente con velocità angolare $\underline{\omega} = \omega\,\hat{y}$ rispetto agli spazi inerziali. Si scelgano come parametri Lagrangiani (x, ϑ): l'ascissa x di P e un angolo orientato ϑ tale che quando $x_G = 0$ si abbia $\vartheta = 0$. Verificare che esiste almeno un equilibrio. In dettaglio, dimostrare (o confutare) che non esiste alcuna scelta dei parametri $\omega \in \mathbb{R}$ e di $h, g, m, M, R > 0$ per cui quell'equilibrio sia stabile.

3

cognome e nome: ....

Appello di Fisica Matematica - terza parte - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 3 settembre 2012

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui sono svolti gli esercizi relativi a 2 e 3, anch'esso con cognome e nome e con i numeri 2 e 3 messi bene in evidenza.

1• Data la Lagrangiana $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + A(q)\cdot\dot{q}, \quad q \in \mathbb{R}^N$, dove $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è una funzione vettoriale, calcolare in dettaglio la corrispondente Hamiltoniana $H(q,p)$.

2• Dimostrare che le trasformazioni canoniche 1-valenti ($c = 1$)

$$x : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N} \qquad y \mapsto x(y)$$

preservano il volume, cioè, per ogni
$D \subset \mathbb{R}^{2N}$, $Vol\,(D) = \int_D dy^{(2N)} < +\infty$,
si ha

$$Vol(x(D)) = Vol\,(D)$$

Soluzione (bozza).

2

$x_G = R\vartheta$

Il lavoro della forza di Coriolis è nullo: Punto e Disco sono, separatamente, sistemi 1-dim., questo conduce al risultato (perché?).

$$U(x,\vartheta) = \frac{1}{2}h(R^2 + (R\vartheta - x)^2) - \frac{1}{2}\omega^2(\underbrace{\mathcal{I}_G}_{\frac{1}{4}MR^2} + MR^2\vartheta^2) - \frac{1}{2}mx^2$$

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & U_{,x} & = -hR\vartheta + (h - m\omega^2)x \\ 0 & = & U_{,\vartheta} & = hR^2\vartheta - M\omega^2 R^2\vartheta - hRx \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (h - m\omega^2)x + (-hR)\vartheta \\ 0 & = & (-hR)x + (h - M\omega^2)R^2\vartheta \end{array}$$

L'equilibrio da studiare è $(0,0)$; nel caso la matrice Hessiana sia degenere esistono ulteriormente infine altre soluzioni.

$$\nabla U(x,\vartheta) = \nabla U(0,0) = \begin{pmatrix} h - m\omega^2 & -hR \\ -hR & (h - M\omega^2)R^2 \end{pmatrix}$$

Condizioni affinché sia definita positiva:

$$h - m\omega^2 > 0, \qquad \det \nabla U(0,0) > 0$$
$$\det \nabla U(0,0) = -m\omega^2 hR^2 - hM\omega^2R^2 + mM\omega^4R^2 > 0$$
$$-m\omega^2 h - hM\omega^2 + mM\omega^4 > 0$$
$$(m+M)h < mM\omega^2$$

Dunque dovrebbe essere:

$$h < \frac{mM}{m+M}\omega^2 \quad \underbrace{<}_{si\ pensi\ alla\ massa\ ''ridotta''} \quad m\omega^2$$

e questa è incompatibile con l'altra condizione:

$$h - m\omega^2 > 0$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ non è mai stabile, per nessuna scelta dei parametri costitutivi.

3

1• Dopo alcuni conti standard si arriva a: $H = \frac{|p-A|^2}{2}$

2• Basta ricordare che nel caso $c = 1$:

$$J\mathbb{E}J^T = \mathbb{E} \Rightarrow (\det J)^2 = 1 \Rightarrow |\det J| \equiv 1$$

da cui

$$Vol(x(D)) = \int_{x \in x(D)} dx = \int_{y \in D} \left|\det \frac{\partial x}{\partial y}(y)\right| dy = Vol\,(D)$$